

Föreläsning 1 2022-11-01

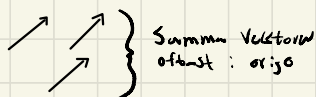
Vilhelm Prytz
vprytz@kth.se
vilhelm@prytzn.se

- Vecka = modul
 - p in sum. Prot 20 min, bonuspoäng
 - Rekommenderade uppgifter: varje modul.
 - Fokusser p in begrupp o metoder
-
- Vektorer, normen, skalär produkt, projektion

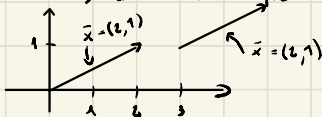
Vektorer

T.ex. Kraft, förflyttning, ...

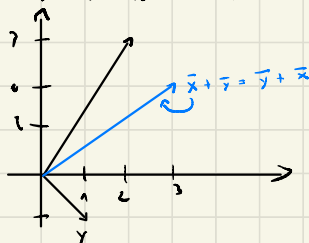
- Geometriskt beskrivs av riktning o längd.



- analytiskt - "n-tupla" tal



Vektorer kan adderas

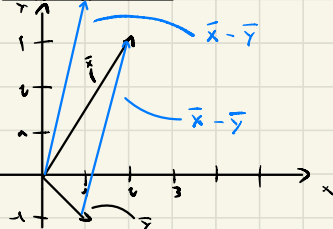


$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{x}$ $\bar{y}$

adderas komponentvis

Subtraktion



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

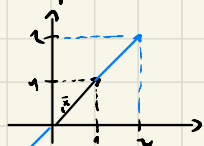
$\bar{x}$ $\bar{y}$ $\bar{x}-\bar{y}$

komponentvis

OBS $\bar{y} + (\bar{x} - \bar{y}) = \bar{x}$

$\bar{x} - \bar{y}$ är den vektor som ska läggas till $\bar{y}$ för att få $\bar{x}$

Multiplikation med konstant



$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ovan vektor: $\mathbb{R}^2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$

Ex. Vektorrum $\mathbb{R}^n$ är $\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$

med operationer: addition & multiplikation med konstant.

Sådan att (addition)

a.) $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$

b.) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$

c.) $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x} \quad (\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix})$

d.) $\forall \bar{x}$ finns $(-\bar{x})$ s.a. $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$

Sådan att (multiplikation)

e.) $(s+t)\bar{x} = s\bar{x} + t\bar{x}$

f.) $s(\bar{x} + \bar{y}) = s\bar{x} + s\bar{y}$

g.) $s(t\bar{x}) = (st)\bar{x}$

h.) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$

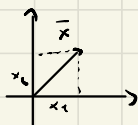
Det finns andra vektorrum.

Ex. Rum av lösningar till ett system av lin. diff. ekvationer är ett vektorrum.

Def. Om $\bar{x} = t\bar{y}$ för något $t \in \mathbb{R}$, så kallas $\bar{x}$ och $\bar{y}$ för parallella ($\bar{x} \parallel \bar{y}$)
om $t > 0$ så har $\bar{x}$ och $\bar{y}$ samma riktning.

Ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -15 \\ -30 \end{pmatrix} \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ -30 \end{pmatrix}$ ej samma riktning

Norm. Ex.



$\text{längd } (\bar{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$\|\bar{x}\|$ (pythagoras sats)

För $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, definier norm av $\bar{x}$: $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Ex. $\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Sats om $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, så:

• $\|\bar{x}\| \geq 0$, $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

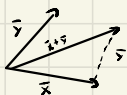
• $\|t\bar{x}\| = |t| \cdot \|\bar{x}\|$

• ~~$\|\bar{x} + \bar{y}\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$~~

Def. $\bar{y} = -\bar{x}$ $0 = \|\bar{x}\| + \|\bar{x}\|$

Sats (triangelolikheten)

$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$



Def. $\bar{x}$ är enhetsvektor om $\|\bar{x}\| = 1$

Ex. $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$ o.s.v.

Kallas för standard enhetsvektor

Givet $\bar{x}$, kan man normera den:

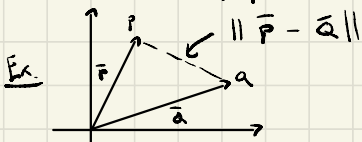
$\bar{e}_x = \frac{1}{\|\bar{x}\|} \cdot \bar{x}$ $\|\bar{e}_x\| = \frac{1}{\|\bar{x}\|} \cdot \|\bar{x}\| = 1$

Ex. om $\bar{x} = (3, 4)$ $\bar{e}_x = \frac{1}{\|\bar{x}\|} \cdot \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \bar{x} = \frac{1}{5} \cdot (3, 4) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$



OBS. Punkter i $\mathbb{R}^n$ kan associeras med vektorer från $\bar{0}$ till P.

Avstånd mellan punkter



Ex.

Skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$

För $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ definierar $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ ← Tut!

Ex. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 11$

OBS $\bar{x} \cdot \bar{x} = \|\bar{x}\|^2$

Sats (1.2.12.) (Cauchy-Schwarzs)

För alla $\bar{w}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Anh.: $-1 \leq \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} \leq 1$

V: Kann man auch los w darstellen

Def: Vinkel mellom $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är $\arccos\left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}\right)$

OBS: I $\mathbb{R}^n$ är α "den vinkel vinkel"



$\cos \alpha = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}$ ← Memorera!

Boris-Se beken: (Visar att $\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos \alpha$ m.h.a. Cosinus-Satsen)

Ex: Beräkna cos av vinkeln mellan $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\cos \alpha = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}}$$

Spetsig $\Leftrightarrow \cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} > 0$

trubbig $\Leftrightarrow \dots < 0$

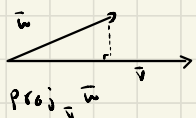
Rätvinkel $\Leftrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

Def: $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är ortogonala om $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

Sats (Pythagoras): Om $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, så $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$

Boris: $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = \underbrace{\bar{u} \cdot \bar{u}}_{\|\bar{u}\|^2} + \underbrace{\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{u}}_{2\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \text{ (givet)}} + \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{v}}_{\|\bar{v}\|^2} = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$ V.s.B.

(Ortogonal)projektion av vektor $\bar{u}$ på vektor $\bar{v}$ är en vektor



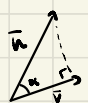
$\text{proj}_{\bar{v}} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}\|^2} \cdot \bar{v}$ ← vektor i med $\bar{v}$

$\|\text{proj}_{\bar{v}} \bar{u}\| = \frac{|\bar{u} \cdot \bar{v}|}{\|\bar{v}\|^2} \cdot \|\bar{v}\| = \frac{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot |\cos \alpha|}{\|\bar{v}\|} = \|\bar{u}\| \cdot |\cos \alpha|$

Föreläsning 2 2022-11-01

Projektioner

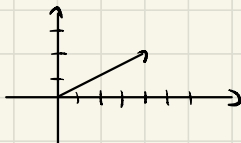
Linjer & plan


$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} = \frac{\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \frac{1}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

Erläuterung:
Länge $\vec{v}$

Ex. Låt $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$



OBS $\vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$ är ortogonal mot $\vec{v}$

$$(\vec{w} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v} - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v} - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \|\vec{v}\|^2 = 0$$

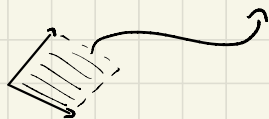
Vektorprodukt (Kryssprodukt)

Vektorer $\vec{w}$ och $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^3$ är två vektorer.

$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = i(w_2 v_3 - w_3 v_2) - j(w_1 v_3 - w_3 v_1) + k(w_1 v_2 - w_2 v_1) = \begin{pmatrix} w_2 v_3 - w_3 v_2 \\ -(w_1 v_3 - w_3 v_1) \\ w_1 v_2 - w_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Sats: $\vec{w} \times \vec{v}$ är ortogonal mot både $\vec{w}$ och $\vec{v}$

$\|\vec{w} \times \vec{v}\|$ är arean av parallelogram



Ex. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

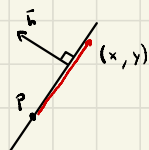
Ekvation för linje i $\mathbb{R}^2$

$Ax + By + C = 0$, A och B inte båda $= 0$ $\parallel$

Om $B \neq 0$ kan skrivas som $y = kx + m$

Punkten $(x, y) \in L \Leftrightarrow (tm \alpha =) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

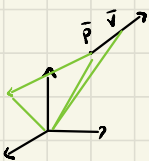
Linjen i $\mathbb{R}^2$ $P = (x_0, y_0)$ med normalvektor $\bar{n} = (A, B)$



$$\begin{aligned} \text{Punkten } (x, y) \in L &\Leftrightarrow \\ (x - x_0, y - y_0) &\perp \bar{n} \Leftrightarrow \\ (x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B) &= 0 \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) &= 0 \\ Ax + By - (Ax_0 + By_0) &= 0 \end{aligned}$$

Linjen p : parameterform (formen i $\mathbb{R}^n$)

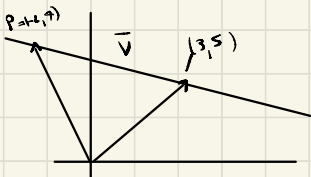
Givet riktningvektor $\bar{v}$ och punkt P .



$$\bar{x} \in L \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{p} + t \cdot \bar{v} \text{ för något } t \in \mathbb{R}$$

$$L = \{ \bar{p} + t \bar{v} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Ex. Bestäm en parametrisk ekvation för linjen genom $(-2, 7)$ och $(3, 5)$.



$$\text{Tag } \bar{v} = (3, 5) - (-2, 7) = (5, -2) \text{ och } P = (-2, 7)$$

$$L = \{ \bar{x} = (-2, 7) + t(5, -2) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

OBS det finns många ekvationer för samma linje

Ekvation för ett plan i $\mathbb{R}^3$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ och } A, B, C \neq 0)$$

är en ekvation för ett plan $\tilde{\pi}$ i $\mathbb{R}^3$.

Vektor (A, B, C) är normal till planet.

Punkten $(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow$ vektorn $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) \perp \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ (ortogonalt)

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \quad A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

Ex. a) Bestäm en ekvation för planet genom $P=(1,0,0)$ som har normal $\vec{n} = (2,3,-1)$.

b). Ligger $Q=(0,5,-2)$ i detta plan?

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}$
 $\Leftrightarrow 2(x-1) + 3y - z = 0$

b). Sätter in $Q=(0,5,-2)$ i ekvation.
 $-2 + 15 + 2 \neq 0$ Nej!

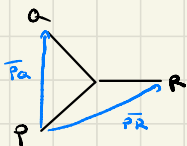
Parametrisk ekvation för planet

Som går genom P och är parallell med vektor $\vec{n}$ och $\vec{v}$.

$$\pi = \left\{ \vec{x} = \vec{P} + s\vec{n} + t\vec{v} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

för s, t som parametrar

Ex. Bestäm en parametrisk ekvation för planet $P=(1,0,0)$, $Q=(0,1,0)$ och $R=(0,0,1)$.



$$\text{Låt } \vec{n} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Föreläsning 3 2022-11-03

- Lite rep. av geometri
- System av linjära ekvationer
- Gausselimination

Rep: $\mathbb{R}^n \ni \bar{x}, \bar{y}$

$$\bullet \|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$


$$\bullet \bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leftarrow \text{Skalarprodukt}$$

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$



$$\bullet \bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \cdot \cos \alpha$$

• $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är:

* parallella om $\bar{x} = t \cdot \bar{y}$, $t \in \mathbb{R}$

* ortogonala om $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

$$\bullet \text{proj}_{\bar{x}} \bar{y} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\|^2} \cdot \bar{x}$$

for

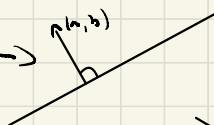


• Kryssprodukt (definierad i $\mathbb{R}^3$)

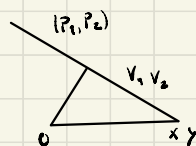
$$\bullet \bar{x} \times \bar{y} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

OBS! $\bar{x} \times \bar{y}$ är ortogonal mot både $\bar{x}$ och $\bar{y}$.

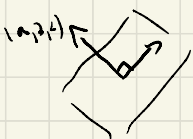
Linje 1) i $\mathbb{R}^2$ $ax + by + c = 0 \longrightarrow$



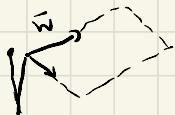
$$2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$



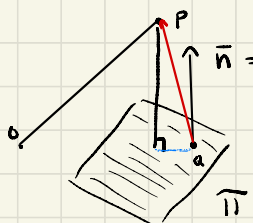
Plann: 1) : $\mathbb{R}^3$ $ax+by+cz+d=0$



2) : $\mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$



Ex. Bestäm avståndet från ^{punkt} $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ till planet $x+2y-2z=-6$



$\vec{n} = (1, 2, -2)$ är en normal till π

ligger i planet

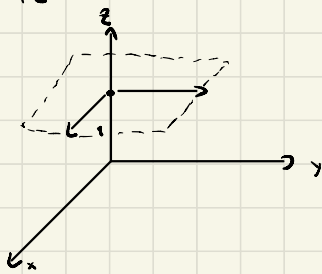
OBS $Q = (0, -3, 0) \in \pi$

$$\text{avståndet } d = \left\| \text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{QP} \right\| = \underbrace{\left\| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n} \right\|}_{\frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP}|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{P} - \vec{Q})|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3} = \underline{\underline{3}}$$

$$\|\vec{n}\| = \|(1, 2, -2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

Ex. Skriv en skalärbeskrivning av planet som ges av.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

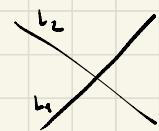


Normalen till planet måste vara $\perp$ mot både $\vec{v}$ och $\vec{w}$, alltså $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$. Kan låta $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Verifiera

Alltså är planet's ekv. $0x + 0y + 1z + d = 0$
 $\Leftrightarrow z + d = 0$

Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \tilde{\Pi}$. Stoppa in i ekvation $1+d=0 \Rightarrow d=-1$

$\Rightarrow \tilde{\Pi}$ har ekv. $z-1=0$

Ex.  Bestäm alla skärningspunkter (om de finns) av linjerna
i $\mathbb{R}^2$: $L_1: 2x+3y=1$
 $L_2: x-2y=-3$

Skärningspunkter är lösningen till systemet.

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-2y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \xrightarrow{\Pi-2I} \begin{cases} x-2y=-3 \\ 7y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ y=1 \end{cases}$$

$y=1, x=-3+2y=-1$ **Svar:** $(-1, 1)$ (Verifiera Svaret)

Sammen sak kan göras i termer av matriser (tabell m).

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & : & 1 \\ 1 & -2 & : & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

utvidgad matris: $\Pi-2I \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \end{array} \right)$

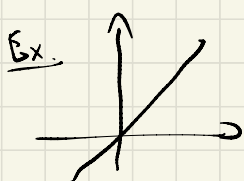
$$\Pi/7 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sådan interproblem som system och lösare är lösningar.

Def. En linjär ekvation är en ekvation på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \text{ där } a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$$

Om $b=0$ är ekvationen homogen, annars inhomogen.



$\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ homogen l.s. eftersom linjen skär origo.

Ovan har vi använt elementära radoperationer, d.v.s.

1) $\rightarrow$

2) addera multipl av en rad till en annan rad

3) multiplicera en rad med en konstant $\neq 0$

för att överföra matrisen (systemet) till trappstegsform (row-echelon form)
Vi har använt Gausseliminationsmetod.

Elementära radoperationer förändrar inte lösningssamlingen.

Ex. Lös systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 5z = 7 \end{cases}$$

Lösning. Utvidgar matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I} + 2\text{I} \\ \text{II} - 3\text{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{III} \\ \text{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{II} \cdot (-2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{III} - 4\text{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{III} / 7 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x - 1 + 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y - 1 = -2 \Rightarrow y = -1 \\ z = 1 \end{array}$$

Föreläsning 4 2022-11-08

- Att lösa linjära system m.h.a. Gausselimination

Gausselimination System (↪ matris)

transformera till p: trappstegsform

m.h.a. elementära radoperationer

- byta plats på två rader
- multiplicera en rad med konstant $\neq 0$
- addera multipl av en rad till en annan

Dessa operationer förändrar inte lösningssmängden.

Ex₁:
$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x+y+2z=5 \\ x-z=-1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 12 \\ 2 & 1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{"utökad matris"} \\ \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & -1 & 0 & | & -19 \\ 0 & -1 & -2 & | & -13 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 12 \\ -\text{II} & 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ -\text{III} & 0 & 1 & 2 & | & 13 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{III} - \text{II} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 2 & | & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{III} \\ 2 \end{matrix}$$

pivot element

Geometriskt har hittat skärningspunkt av 3 plan i $\mathbb{R}^3$.

Ex.
$$\begin{cases} -2x+7y+2z=-2 \\ x-3y+2z=-5 \end{cases} \quad (2 \text{ plan i } \mathbb{R}^3)$$

Normalvektor till planen är parallella $\Rightarrow$ lösningar utgör en linje

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{II+2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -12 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 2 \text{ ledande} \\ \text{etor} \end{array}$$

Varje kolumn motsvarar en variabel. Kolumn utan ledande 1. är kallas för frin.
(motsv. fria variabler)

Sätt dem som parameter. Uttryck de andra variabler som frin.

$$x = 3y - 2z - 5 = 3(-6t - 12) - 2t - 5 = -6t - 41$$

$$y = -6t - 12$$

$$z = t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Den allmänna lösningen

Här är den allmänna lösningen för en linje.

Ex. Bestäm den allmänna lösningen till

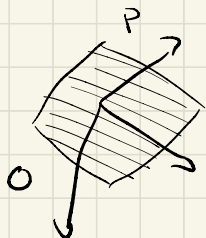
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \leftarrow \text{Matrisen är i trappstegsform}$$

$x \quad y \quad z \quad w$

y & w är fria variabler. Sätt $\begin{cases} y=s \\ w=t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 1 - t - 3(2 - 2t) - 2s \\ y = s \\ z = 2 - 2t \\ w = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Geometriskt: ett 2-dim plan i $\mathbb{R}^4$

Sats Varje matris har en unika reducerad trappstegsform.

- Antalet ledande ettor är samma i alla trappstegsformer av en given matris.

Def. Ränksnitt (se ovan) kallas för rang av matrisen A . (not: $\text{rank}(A)$)

V: Säg:

$$\# \text{ fria variabler} = \# \text{ variabler} - \text{rank}(A)$$

||

parametrar i den allmänna lösningen.

Alltså, om $\text{rank}(A) = \# \text{ variabler}$, så inga fria variabler $\Rightarrow$ en unik lös. för varje högerled.

Vad händer om $\text{rank} < \# \text{ antal variabler}$?

Ex: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ $0x + 0y + 0z = 1 \rightsquigarrow$ ingen lösning

Ex: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ $x = 0$ ∞ -många lösningar.
 $y = 1 - 2t$
 $z = t, t \in \mathbb{R}$

Sats: Om $\text{rank}(A) = \# \text{Vår}$ har systemet en unik lösning $\forall$ högerled

- Om $\text{rank} < \# \text{Vår}$, betrakta

systemets utvidgade matris och dess trappstegsform $[S|<]$

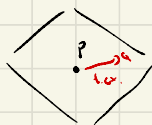
$\forall$ för alla
 $\exists$ existerar /
finns

$\Rightarrow$ Om $[S|<]$ har en rad $[0 \ 0 \ 0 \ | \ <_i]$, $<_i \neq 0$

$\Rightarrow$ inga lösningar $\Rightarrow$ ingen ∞ -många lösningar

Ex₁: Skriv om planet $\overbrace{x+2y+z=1}^{=\pi \text{ ges}}$ p: parameterform.

Metod 1: Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$



OBS: $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är normal till π .

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ är ortogonal mot $\bar{n}$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \right)$

$\Rightarrow \bar{v}_1$ är parallell med planet.

$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är ortogonal mot $\bar{n}$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right)$

men $\bar{v}_1 \parallel$ med $\bar{v}_2$

Ställt för $\bar{v}_2$ kunde man ta $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 \times \bar{n}$

π ges av: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad | \quad s, t \in \mathbb{R}$

Metod 2: $x+2y+z=1$

Som matris

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad 2 \quad 1 \quad | \quad 1 \\ \downarrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{kolonner} \quad \text{rader} \end{array}$$

$$\text{t.ex.} \begin{cases} y=s \\ z=t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$$

param. form for $\tilde{\Pi}$

$$\text{Ex}_1: \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ y - z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\text{rank}(A) = 2 < 3$$

Föreläsning 5 2022-11-08

• Matriser (Kap 3.1.)

• Notationer

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 1: a rad
2: a kolumn

A är en 2×3 matris 2×3 är storlek av A .
↑ ↑
#rad #kolumn

$A_{11} = 4$ - värdet av A .
↑ ↑
rad kolumn

Ex. $A = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$ har storlek 1×4 . $A_{13} = 3$

Allmänt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ är en $m \times n$ matris

Def.

• A av storlek $n \times n$ kallas kvadratisk.

• Diagonalmatris

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

• Identitetsmatris:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_n$$

• Nollmatris: $n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_n = 0_{nn}$

Operationer med matriser.

• Om A och B har samma storlek

$$\text{S: } (A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij} \quad \forall i, j$$

• för en skalar k

$$(k \cdot A)_{ij} = k \cdot A_{ij}$$

Ex. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 & 3+0 \\ 4+0 & 5+1 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Räkne regler - de naturliga

• Transponat av en $m \times n$ matris A är $m \times n$ matris B som ndm

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Ex. $a \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Regler $\rightarrow (A^T)^T = A$

$$\rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$\rightarrow (k \cdot A)^T = k \cdot A^T$$

Ex. För vilken matriser är $(A+A^T)$ definit?
Kvadrat.

• A är Symmetrisk om $A = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A_{ij} = A_{ji}$$

• A är Skewsymmetrisk om $A = -A^T$

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall_{i,j} : A_{ij} = -A_{ji}$$

$$\text{Speziell } A_{ii} = -A_{ii} = 0$$

• Matrixmultiplikation

① Multiplizieren (row-Vektor) · (Kolumn-Vektor)

$$\text{Ex. } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{1 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{3 \times 1} = (3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = 10$$

(Denke an Skalarprodukt)

$$\text{Allm.}: \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

② Multiplizieren (matrix) · (Kolumn-Vektor)

$$\text{Ex. } \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cdot x \\ r_2 \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 1$

Ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme mit Matrixmultiplikation

Lin. System

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_b$$

$$\boxed{A \bar{x} = \bar{b}}$$

Man vill multiplicera med A^{-1} .

Multiplikation av matriser:

Ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ går inte att multiplicera}$$

Ex.

$$\begin{matrix} n \\ \boxed{m \times n} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \boxed{n \times p} \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{m \times p} \\ p \end{matrix}$$

Ex. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vilken produkt är definierad?

$$\begin{matrix} A^2 \\ + \end{matrix}, \begin{matrix} AB \\ - \end{matrix}, \begin{matrix} BA \\ + \end{matrix}, \begin{matrix} CA \\ - \end{matrix}, \begin{matrix} C^T A \\ + \end{matrix}$$

Sats. om $\alpha \in \mathbb{R}$, A , B , C är matriser av lämplig storlek så

- $\alpha(AB) = \alpha \cdot A \cdot B = A \cdot \alpha \cdot B$
- $A(BC) = (AB)C$
- $(A \pm B)C = AC \pm BC$, $A(B \pm C) = AB \pm AC$

Man observerar $AB \neq BA$

$$\text{Ex. } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrisen 0 betur s'is næstun alltid som 0.

Satz om A og 0 er matriser af lümpelig storlek, si:

$$A \pm 0 = A \quad 0 \pm A = A \quad A - A = 0$$

Min . $AB = AC$, $A \neq 0$ medföljär att $B = C$

• $AB = 0$ medföljär att $A = 0$ eller $B = 0$

$$\text{Ex. } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_{\neq 0} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Identitetsmatris:

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. om A är $m \times n$, si:

$$A \cdot I_n = A, \quad I_m \cdot A = A$$

Def. om A og B är $n \times n$ matriser sådana att $AB = I_n = BA$, si säger vi att A (og B) är inverterbar, og $B = A^{-1}$ (og $A = B^{-1}$)

"ej inverterbar" = "singulär"

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$BA = I_2 \quad (\text{verifiera!})$$

$$\text{Alltså är } B = A^{-1}, \quad A = B^{-1}$$

Sats Om B och C är inverser till A , så $B = C$.

Verfär: Vi vet $BA = I$

$$\text{multiplikation med } C: \quad BAC = I C = C \quad (1)$$

$$\text{Vi vet att } AC = I$$

Alltså

$$B(AC) = BI = B \quad (2)$$

$$I C = BAC = B \quad (1) \quad (2)$$

Sats Om A är invertierbar så

$$\boxed{\times} \quad AB = AC \Rightarrow B = C$$

$$\boxed{\times} \quad AB = 0 \Rightarrow B = 0$$

Föreläsning 6 2022-11-10

• Matrisinverser

Def. Om A o B är $n \times n$ Matriser s: att $AB = I_n = BA$, s: är A (o B) inverterbar o $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$

(Sats 3.3.8.) - om AB är $n \times n$ matris s: räcker $AB = I$ för att både A o B är inverterbara.

Sats: (3.2.6) Om B o C är invers till A s: är $B = C$ (om invers finns, unik).

Sats: Om A är inverterbar, s:

$$\bullet AB = AC \Rightarrow B = C$$

$$\bullet AB = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tänk på } t_n \\ \bullet ab = ac \Rightarrow b = c \\ \bullet ab = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array} \right. \quad \text{Om } a \neq 0$$

Ex. a.) 0-matris är inte inverterbar ty om inversen funnits (kalla för 0^{-1})
s: $0 \cdot 0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ omöjligt

b.)

$\begin{pmatrix} * & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ej inverterbar. Varför?

Antag att det finns A^{-1} . Då:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{I_n} \quad \begin{array}{l} r_n \cdot c_n = 1 \\ (0 \dots 0 \dots) \text{ omöjligt!} \end{array}$$

Hur hittar man inversen?

Sats (3.2.7) En 2×2 matris: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är inverterbar $\iff$ ^{"om omvärt om"} $\det A = ad - bc \neq 0$

Och

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bew. $\Leftarrow$) Om $ad-bc \neq 0$, betrakta A^{-1} som ovan

$$\text{Verifiera } A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ad & -bc+bd \end{pmatrix} = I_2$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Verifiera!}$$

Nöjesregler

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} \cdot AB = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B = I_n$$

$$AB \cdot (AB)^{-1} = AB \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = I_n$$

$$(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1} \text{ för alla } \lambda \neq 0. \text{ Verifiera!}$$

Potenser av matris

$$\bullet A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A \cdot A, \text{ osv. } A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_n$$

$$\bullet (A^n)^{-1} = A^{-1} \dots A^{-1} = (A^{-1})^n \text{ man skriver } A^{-n}$$

$$\bullet \text{ Definiera } A^0 = I$$

$$\bullet \text{ För alla } m, n \in \mathbb{Z} \text{ har vi } A^{m+n} = A^m \cdot A^n$$

Inverser o transponat

$$\bullet (AB)^T = B^T \cdot A^T$$

$$\bullet (\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$$

$$\bullet (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Lösen lin. System m.h.a. invers

Givet ett system av lin. ekv., $A\bar{x} = \bar{b}$
där A är invertierbar, kan man lösa de ^{vektorn} $\bar{x}$ här

$$\underbrace{A^{-1}}_{I_n} A\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$
$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

Metoden är bra om man löser många system med samma A om olika $\bar{b}$.

Sats Låt A vara $n \times n$ matris. Följande påståenden är ekvivalenta

- 1.) Reducant trappstegsform av A är I_n .
- 2.) $\text{rank}(A) = n$
- 3.) A är invertierbar
- 4.) System $A\bar{x} = \bar{b}$ har en unik lösning
- 5.) System $A\bar{x} = \bar{b}$ har en unik lösning för varje vektor $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$

Beweis av 5) $\Rightarrow$ 3)

Antag att $A\bar{x} = \bar{b}$ har en unik lösning $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^n$

Vi vill visa att A^{-1} finns

Illustrera beviset på 2×2 matris.

Ex. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Sök $A^{-1} := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, d.v.s.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{B(?) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Lösningar finns för varje höjrad.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ om $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ finns $\Rightarrow A^{-1}$ finns $\square$

Låt oss beräkna A^{-1} .

Gauss-eliminera höger system samtidigt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 5 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -5 & 2 \\ 0 & -1 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\xrightarrow{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -5 & 2 \\ 0 & 1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$

Verifiera! $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Metod för att beräkna A^{-1}

• $(A | I_n)$, gör um.

Radoperationer på A för att föra den till I_n .

• Gör samma radoper. på I_n .

Detta för I_n till A^{-1} .

Metoden fungerar om A har I_n som reducerad trapp. form.

Ex. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A^{-1} ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - 3\text{I} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_n} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$

Verifiera!

OBS: om A har I_n som redn. trapp. form, så har vi "konstruerat" A^{-1} m.h.a.

elementära rödoperationer (ERO).

$$(ERO_k) \dots (ERO_1) A = I_n$$

$$(ERO_k) \dots (ERO_1) \cdot I_n = A^{-1}$$

OBS! (Kap 3.3). Resultat av (ERO) på matris A kan ses som produkt $E \cdot A$, där E är en elementärmatris motsvarande (ERO).

Elementära matriser är resultat av en elem. rödoper. på I_n .

$$\text{Ex. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}]{ERO_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} := E_1 \quad \text{Elem. matris motsvarar } ERO_1.$$

$$E_1 \cdot A = \underset{E_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \xleftarrow[\text{II}]{?} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Föreläsning 7 2022-11-15

Determinanter (Kap 4.1.)

Ex. Hur får man veta i förväg att ett linjärt system har en unik lösning?

För 2x2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (antag $a \neq 0$)

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{p}{a} \\ c & d & q \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{p}{a} \\ 0 & d - c\frac{b}{a} & q - c\frac{p}{a} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{p}{a} \\ 0 & d - c\frac{b}{a} & * \end{array} \right)$$

$$d - c \cdot \frac{b}{a} \neq 0 \Rightarrow \text{unik lösning för varje } \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ \Rightarrow ad - bc \neq 0$$

Notation $\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_A = \det A = \text{determinant av } A$.

OBS: Vi såg för 2x2 matriser att $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ finns $\Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{b}$ har en unik lösning $\forall \bar{b}$.

De här påståendena gäller för alla $n \times n$ matriser.

Definition av determinanter för $n \times n$ matriser - se Def. 4.1.1. i boken.

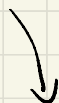
Spec. fall För 3x3 matris, Sarrus regel

Ex.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} + & + & - \\ - & - & + \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} = +1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = \underline{\underline{-5}}$$

(bör som definition av determinanter för 3x3)

Man kan definiera "större" determinanter genom "mindre"



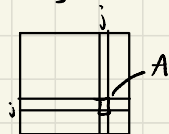
Konflictoorswteckling

1. Minorer En minor M_{ij} av en determinant är en determinant av matrisen där rad i och kolumn j är borttagen.

Ex.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 7 = -12$$



Tecken och Scheman

$$\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & + & - & + & & & & \\ + & - & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \end{array}$$

Spec. full für 3×3 $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Satz (Formulierung für 3×3 gilt für $n \times n$, $n \geq 2$)

Välj en rad (eller kolumn), t.ex. rad #1

det $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}$

Ex.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-3) = -5$$

Ex.

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & \\ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & = & -1 \cdot \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & + & 1 \cdot \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \left(1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ - & + & - & + \end{array}$$
$$+ 1 \left(1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = 1$$

Sats (4.1.5) Man får samma resultat vid utveckling längs en valfri rad (kolumn).

1. kan man bestämma tecken för n ?
 Hur ska man springa mellan variabler?
 Är det några mönster för tecken?

Specialfall

1. Diagonalmatris

Ex.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

2. Triangulärmatris

Ex.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$$

Sats Determinant av en triangulärmatris är produkten av diagonalelement.

Radoperationer och determinanter.

Sats 4.2.2.

1) om $\tilde{A} = (\text{byta plats på två rader i } A)$
 Så $\det \tilde{A} = -\det A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2) om $\tilde{A} = (\text{multiplierad en rad med } k \in \mathbb{R})$,
 Så $\det \tilde{A} = k \cdot \det A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} k & 2k \\ 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

3) om $\tilde{A} = (\text{addera multiplik av en rad till en annan rad i } A)$,
 Så $\det \tilde{A} = \det A$

4) $\det I_n = 1$

Dessa 4 regler tillsammans kan ges som definition av determinanter.

Ex. $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$; $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2$ (enligt regel 1 ovan)

Dessa regler kan användas för att beräkna determinanter.

Ex.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 + r_1 \\ r_3 + 2r_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + 2r_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Triangulär

$$\det A = \det A_1 \stackrel{\text{regel 3}}{=} -\det A_2 \stackrel{\text{regel 3}}{=} -(\det A_3) = -5$$

Dessa regler medför. Sats (4.2.3). För $n \times n$ matris A gäller:

- Om en rad eller en kolumn i A består av 0:or, så $\det A = 0$
- Om A har två likadana rader/kolumner, så $\det A = 0$ (använd regel 3)
- $\det(kA) = k^n \cdot \det A$

Sats (4.2.4). A är inverterbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

För bevis observera att elementära radoperationer förändrar inte egenskapen $\det A \neq 0$.

Ex. För vilken a har systemet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}}_A \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ en unik lösning?}$$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ Systemet ovan har en unik lösning för varje högerled.

$$\det A = a^2 - 4 \neq 0, \quad a \neq 2 \text{ och } a \neq -2.$$

För alla $a \notin \{2, -2\}$ har vårt system en unik lösning.

Sats.

$$\bullet \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$\bullet \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$